Parameterschätzung im Vasicek-Modell

MARIAN BRANDAU,
WILFRIED GRECKSCH,
FRANK EBERT

Halle (Saale), den 15. Mai 2001

1 Einleitung

Um einen Aktienindex $r(t)$ zu modellieren, gibt es unterschiedliche Ansätze. Ihnen alle liegt die Annahme $\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t) \sim f\big(t, r(t)\big)\Delta t$ zugrunde. Diese ermöglicht den Ansatz $\Delta r = \tilde{f}\big(t, r(t)\big)\Delta t$, der schließlich auf die Differentialgleichung $\dot{r}(t) = \tilde{f}\big(t, r(t)\big)$ führt. Ein Beispiel ist die Beschreibung eines exponentiellen Wachstums durch ein Anfangswertproblem $\dot{r}(t) = \lambda r(t)$, $r(0) = r_0$, $(\lambda > 0)$. Wie Abbildung 1 zeigt, eignet sich das Modell so nicht zur Beschreibung eines Aktienindex. Um den Ansatz dennoch zu verwenden, ist es notwendig, die Herangehensweise zu modifizieren. Die Erweiterung besteht darin, $\Delta r(t)$ als stochastisch gestört anzusehen. Dazu prägt man dem Zuwachs ein Rauschen auf. Damit ergibt sich $\Delta r(t) = \tilde{f}\big(t, r(t)\big)\Delta t +$ „*Rauschen*“. Stellt man noch die Bedingungen

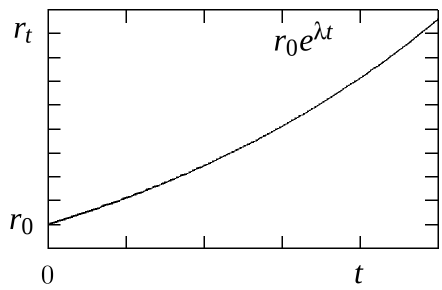

Abbildung 1: einführendes Beispiel

- $\Delta r(t)$ normalverteilt mit $\tilde{f}\big(t, r(t)\big)\Delta t$ als Erwartungswert,

- und hängt die Streuung des Zufallsterms nur von $r(t)$ ab und ist proportional zu Δt

an $\Delta r(t)$, so gilt

$$dr(t) = \tilde{f}\big(t, r(t)\big)\,dt + \sigma\big(r(t)\big)\,dW(t),\; r(0) = r_0 \tag{1}$$

wobei (1) als *Ito*-Gleichung bezüglich eines *Wiener*-Prozesses zu verstehen ist. Falls $\tilde{f}$ nicht von t abhängt liefert Gleichung (1) die große Klasse der sogenannten Einfaktormodelle (vgl. (Ruß99) und (EK98) sowie die darin enthaltenen Literaturangaben). Dazu gehören u.a.:

(A) *Rendleman* and *Bartter*-Modell:
Hier ist $\tilde{f}(r) = \mu r$ sowie $\sigma(r) = \sigma r$.

$$dr = \mu r\,dt + \sigma r\,dW_t$$

(B) *Vasicek*-Modell:
Hier ist $\tilde{f}(r) = a(b-r)$ sowie $\sigma(r) = \sigma$.

$$dr = a(b-r)\,dt + \sigma\,dW_t$$

(C) *Cox-Ingersoll-Ross*-Modell:
Hier ist $\tilde{f}(r) = a(b-r)$ sowie $\sigma(r) = \sigma\sqrt{r}$.

$$dr = a(b-r)\,dt + \sigma\sqrt{r}\,dW_t$$

Für die hiesigen Betrachtungen wählten wir das *Vasicek*-Modell. Dieses Modell wurde deshalb ausgesucht, weil damit der Effekt der Schwankung der Zinsen um einen langfristigen Mittelwert berücksichtigt wird. In diesem Modell können explizite Formeln für den Preis bestimmter Typen von zero-coupon Bonds und coupon Bonds hergeleitet werden. Diese Eigenschaft ist für die späteren Anwendungen auf die Preisfindung eines Wertpapiers, das den Indexstand zu einem bestimmten Zeitpunkt abbildet, wichtig. Alle drei Modelle werden häufig genutzt, da sie leicht zu implementieren sind. Anliegen der Arbeit ist die Schätzung von a, b und σ anhand von Indexwerten, wobei hier Aufzeichnungen des **EuroStoxx50**-Index verwendet werden. Die Schwierigkeit der Schätzung besteht darin, dass sowohl Drift- als auch Diffusionskoeffizienten bestimmt werden müssen. Ist nur einer der Koeffizienten zu schätzen, so liegt bereits eine große Anzahl von Arbeiten vor (z. b. (AY97), (BS95) und (LS78)). Methoden zum Schätzen beider Koeffizienten sind z. b. in (Ulr00) beschrieben. Wir schätzen zunächst durch den Übergang zur Erwartungswertfunktion im Modell B die Koeffizienten a und b und anschließend ermitteln wir eine Schätzung für σ mittels der Methode der kleinsten Quadrate durch Anwendung der Eigenschaften einer *Ito*-Gleichung. Diese Herangehensweise wird anhand von Computersimulationen demonstriert.

2 Einige Bemerkungen zum *Vasicek*-Modell

Wie schon erwähnt, ist das Modell B Gegenstand der Untersuchungen.

$$\boxed{dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW(t)} \quad a > 0, b > 0 \text{ und } \sigma > 0 \tag{2}$$

Die Modellgleichung

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW(t),\ r(0) = r_0 \tag{3}$$

wird als lineare inhomogene Stochastische Differenzialgleichung (SDGL) im starken Sinne aufgefaßt, d.h., sie ist durch

$$r(t) = r_0 + abt - a\int_0^t r(s)\,ds + \int_0^t \sigma\,dW(s) \tag{4}$$

definiert. Diese Beziehung ergibt sich aus der Definition der am Anfang vorgestellten *Ito*-Gleichung (1) als

$$r(t) = r_0 + \int_0^t f(s, r(s)\,ds + \int_0^t \sigma(r(s))\,dW(s),$$

wobei der zweite Integralausdruck als *Ito*-Integral zu verstehen ist. Um zu einer Lösung der SDGL (3) zu gelangen, betrachtet man zunächst das homogene Problem, das hier nur aus folgendem deterministischen AWP

$$dr(t) = -ar(t)dt, \qquad\qquad r(0) = r_0$$

mit der Lösung

$$r(t) = r_0 e^{-at}$$

besteht. Die Lösung von (3) im Sinne von (4) erhält man mittels der *Ito*-Formel (vgl. (GS71)).

$$r_t = e^{-at}\left[r_0 + (e^{at} - 1)b + \int_0^t \sigma e^{as}\, dW_s\right] \tag{5}$$

Mittels (GS71, Satz 1 auf Seite 38) ergibt sich offensichtlich die Eindeutigkeit des Lösungsprozesses mit Wahrscheinlichkeit 1.

3 Möglichkeiten zur Schätzung der unbekannten Koeffizienten a, b und σ

Nach den Vorbetrachtungen ist es jetzt möglich, einen ersten naiven Ansatz zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten durchzuführen. Dazu wird die Zeit diskretisiert $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = n$. Da es sich hier bei den diskreten Zeitpunkten um fortlaufende Tage eines Monats handelt, wird $t_i = i$ gesetzt. Desweiteren sind die $r(t_i)$ die gemessenen Daten des Zeitpunktes t_i. Betrachtet wird der **EuroStoxx50**-Index über den Zeitraum von 6 Jahren (1992 -1998). Die Urdaten sind monatsweise aufgeteilt.

Die ursprüngliche SDGL (3) wird in Anlehnung an das *Euler*-Verfahren durch die Differenzengleichung

$$r(t_{i+1}) - r(t_i) = a(b - r(t_i))(t_{i+1} - t_i) + \sigma(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \tag{6}$$

approximiert. Konvergenz- und Stabilitätsbetrachtungen sind in (KP92) angegeben. Bildet man noch den Erwartungswert von (6), so erhält man

$$E\big(r(t_{i+1}) - r(t_i)\big) = a\big(b - r(t_i)\big)(t_{i+1} - t_i),$$

wobei der Ausdruck mit $\Psi_{a,b}(t_i)$ bezeichnet wird. Die Koeffizienten a und b werden nun entsprechend der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt.

$$\sum_{i=0}^{N-1}\Big[r(t_{i+1}) - r(t_i) - \Psi_{a,b}(t_i)\Big]^2 \stackrel{!}{=} \min_{a,b} \tag{7}$$

Um einen groben Eindruck zu erhalten, wie realistisch diese Schätzungen sind, werden hier einige Erwartungswertkurven des Lösungsprozesses der Gleichung (3) dargestellt. Aus (5) erhalten wir für die Erwartungswertfunktion

$$E\big(r(t)\big) = e^{-at}\big[r_0 + (e^{at} - 1)b\big].$$

Eine Schätzung für r in (6) erhalten wir,wenn a und b durch $\hat{a}$ und $\hat{b}$ ersetzt werden. In den Abbildungen 2 und 3 sind die Schätzungen der Erwartungswertfunktion für

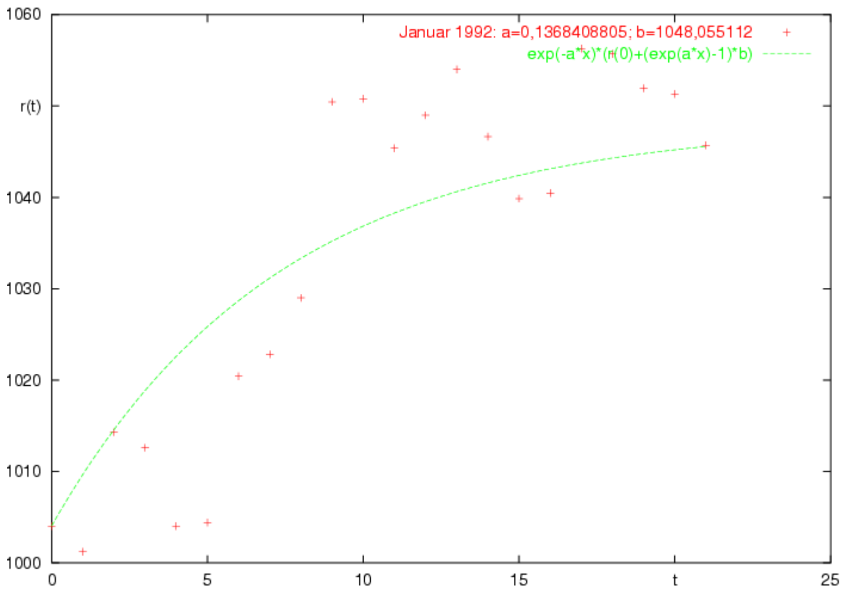

Abbildung 2: Erwartungswertkurve Januar 1992

die Entwicklung des **EuroStoxx50**-Index für Januar und Juni 1992 dargestellt. In die Abbildungen sind auch die gemessenen Indexwerte eingetragen. Man erkennt, dass durch die Schätzungen das mittlere Verhalten „recht gut“ wiedergegeben wird.

Nachdem mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gleichung (7)) die Parameter a und b geschätzt wurden, soll nun unter Zugrundelegung der Schätzungen von a und b der Parameter σ geschätzt werden. Zur Bestimmung von $\hat{\sigma}$ wird die Normalverteilung der Zuwächse eines *Wiener*-Prozesses ausgenutzt. Aus Gleichung (6) folgt

$$r(t_{i+1}) - r(t_i) - \hat{a}(\hat{b} - r(t_i))(t_{i+1} - t_i) = \sigma(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \qquad (8)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

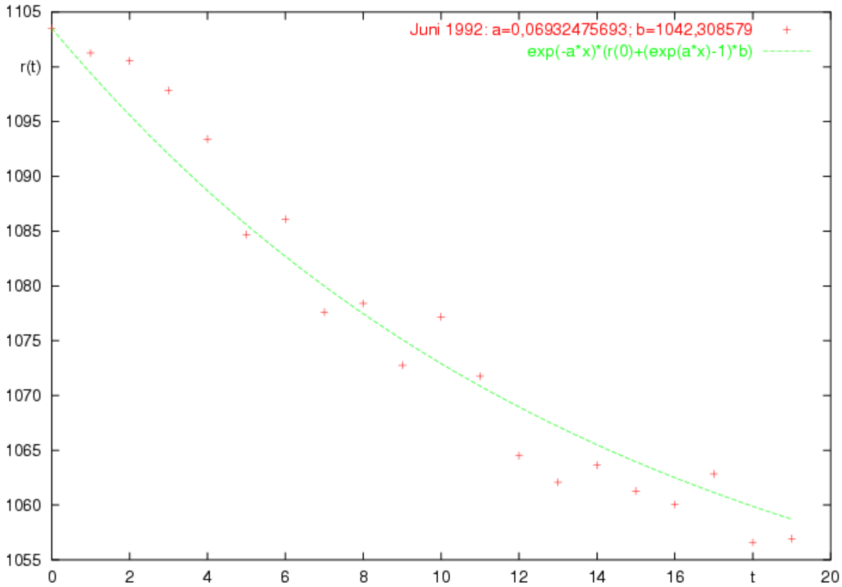

Abbildung 3: Erwartungswertkurve Juni 1992

Damit können wir

$$\Big(r(t_1)-r(t_0)-\hat{a}\big(\hat{b}-r(t_0)\big),\ldots,r(t_n)-r(t_{n-1})-\hat{a}\big(\hat{b}-r(t_{n-1})\big)\Big) \tag{9}$$

als Stichprobe $(X_1,\ldots,X_n)$ einer $N(0,\sigma^2)$-verteilten Grundgesamtheit auffassen, und somit kann eine Schätzung für σ mittels der empirischen Streuung bestimmt werden.

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

4 Einige Simulationsergebnisse

Da nun alle Parameter a, b und σ in (2) geschätzt sind, ist es möglich, mit Gleichung (6) einen Index zu simulieren. Der *Wiener*-Prozess wird gemäß dem *Levy*-Verfahren simuliert. Die Simulation wird entsprechend

$$\begin{aligned}\hat{r}^{(j)}(t_{i+1})-\hat{r}^{(j)}(t_i) &= a\big(b-\hat{r}^{(j)}(t_i)\big)(t_{i+1}-t_i)\\ &\quad+\sigma(W(t_{i+1})-W(t_i))\\ &=: \Delta\hat{r}_i^{(j)} \qquad (i=0,\ldots,n-1)\end{aligned}$$

durchgeführt, d.h,

$$\begin{aligned}\hat{r}^{(j)}(0) &= r(0)\\ \hat{r}^{(j)}(1) &= \hat{r}^{(j)}(0) + \Delta\hat{r}_0^{(j)}\\ &\vdots\\ \hat{r}^{(j)}(n) &= \hat{r}^{(j)}(n-1) + \Delta\hat{r}_{n-1}^{(j)}\end{aligned} \tag{10}$$

wobei $j = 1, \ldots, m$ die Simulationsdurchläufe zählt. Für die auf dem Monat Juni

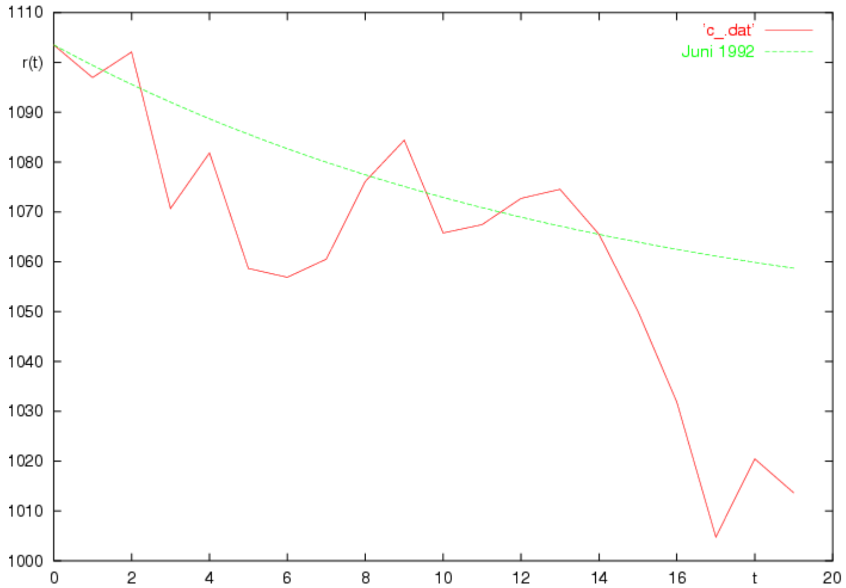

Abbildung 4: Vergleich Erwartungswert und Simulation Juni 1992

1992 basierenden Schätzungen für a, b und σ wurden Simulationen $r^{(j)}(1), r^{(j)}(2), \ldots, r^{(j)}(19)$ ermittelt ($j = 1, \ldots, 20$). In Abbildung 4 sind die Mittel $\sum_{j=1}^{20} \hat{r}^{(j)}(k)$ $(k = 1, \ldots, 20)$ dargestellt. In der Darstellung ist zu erkennen, dass die Abweichungen der Mittelwertkurve vom Erwartungswert mit fortschreitender Zeit zunehmen. Eine Ursache ist der zunehmende Abstand der Approximierenden des *Euler*-Verfahrens (6) von der tatsächlichen Lösung mit wachsender Entfernung vom Startwert. Die ermittelten Ergebnisse sind ein erster Anhaltspunkt, dafür dass das gewählte Modell Erfolg versprechend ist.

Die Ergebnisse können noch durch einige statistische Untersuchungen untermauert werden. Ein Ausgangspunkt besteht in der schon bekannten Interpretation von (9) als Stichprobe einer $N(0,\sigma^2)$-verteilten Grundgesamtheit. Wir erstellen mit den Simulationsergebnissen für das Jahr 1992 ein Häufigkeitsdiagramm. Eine Nor-

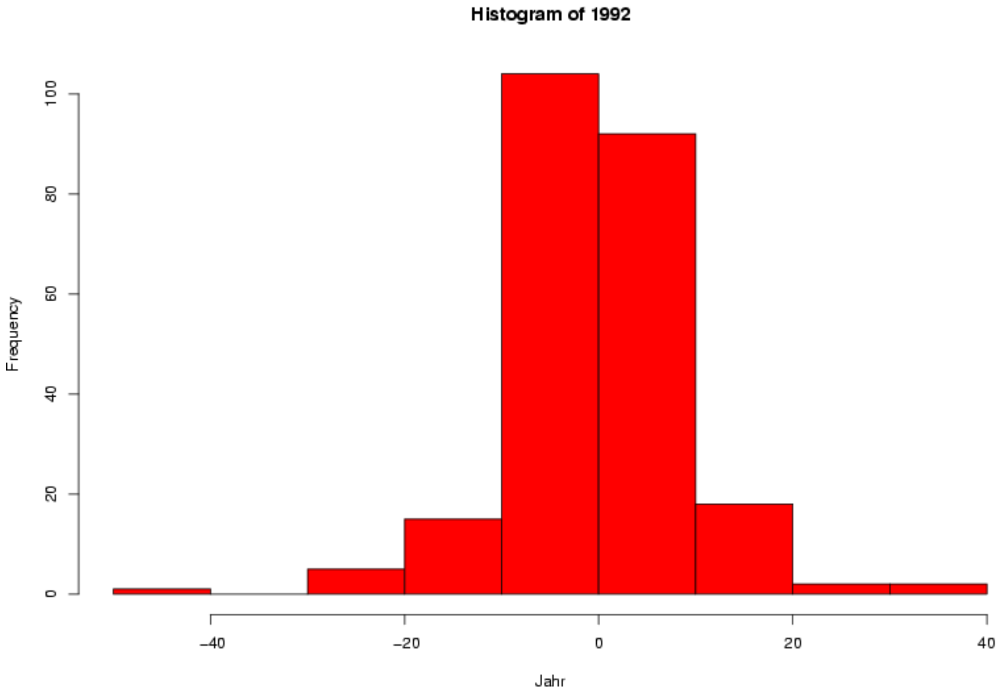

Abbildung 5: Häufigkeitsdiagramm für das Jahr 1992

malverteilung ist grob zu erkennen. Der χ^2-Anpassungstest bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,05$ ergibt, dass keine Einwände gegen die Zugrundelegung einer Normalverteilung bestehen.

Desweiteren werden Stichproben $\hat{r}_i^{(j)}$ entsprechend (10) bei festem i mittels des einfachen t-Tests auf Einhaltung der Erwartungswertfunktion $\mu(t) = e^{-at}(r_0 + (e^{at} - 1)b)$ für $t = 1,\ldots$ geprüft. Für die Zeitpunkte $t = 1,2,3$ sind bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,05$ keine Einwände gegen diese Hypothese feststellbar. Ab $t > 3$ ergeben sich bezüglich des Tests keine brauchbaren Ergebnisse. Dieses Ergebnis ist nicht überraschend, da wegen der großen Schwankungen von Kursverläufen Vorhersagen nur über „kleine“ Zeiträume möglich sind. Es bleibt weiteren Untersuchungen überlassen zu prüfen, ob sich Verbesserungen ergeben, wenn „bessere“ Diskretisierungen als das *Euler*-Verfahren angewandt werden. Die reale Situation bedenkend, werden bei Aktienkursen nur Vorhersagen für kleine Zeiträume sinnvoll sein. In diesem Sinne ist die vorgestellte Methode anwendbar.

Literatur

[AY97] ARTEMEV, S.S ; YAKUNIN, M.A.: Estimation of the parameters in stochastic differential equations. In: *Russian Journal of numerical analysis and mathematical modelling* (1997), Nr. 1, S. 1–12

[BS95] BIBBY, Bo M. ; SØRENSEN, Michael: Martingale estimation functions for discretely observed diffusion processes. In: *Bernoulli 1* (1995), Nr. 1, S. 17–39

[BSMM95] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt am Main : Verlag Harri Deutsch, 1995

[EK98] ELLIOTT, Robert J. ; KOPP, P. E.: *Mathematics of Financial Markets*. New York : Springer-Verlag, 1998

[GS71] GICHMAN, I.I. ; SKOROCHOD, A.W.: *Stochastische Differentialgleichungen*. Berlin : Akademie-Verlag, 1971

[KP92] KLOEDEN, Peter E. ; PLATEN, Eckhard: *Numerical Solutions of Stochastic Equations*. Berlin : Springer-Verlag, 1992

[LS78] LIPSTER, R.S. ; SHIRYAEV, A.N.: *Statistics of Random Processes I,II*. Berlin : Springer-Verlag, 1978

[Øks92] ØKSENDAL, Bernt: *Stochastic Differential Equations*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1992

[Par89] PARTZSCH, Lothar: *Vorlesungen zum eindimensionalen Wienerschen Prozeß*. Leipzig : B. G. Teubner, 1989

[Ruß99] RUSS, Jochen: Die Aktienindexgebundene Lebensversicherung mit garantierter Mindestverzinsung in Deutschland / IFA. Ulm, 1999. – Forschungsbericht

[SB95] STEINER, Manfred ; BRUNS, Christoph: *Wertpapiermanagement*. Stuttgart : Schäffer-Poeschel Verlag, 1995

[Ulr00] ULRICH, Angela: *Parameterschätzprobleme in Stochastischen Differentialgleichungen*, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Diplomarbeit, 2000